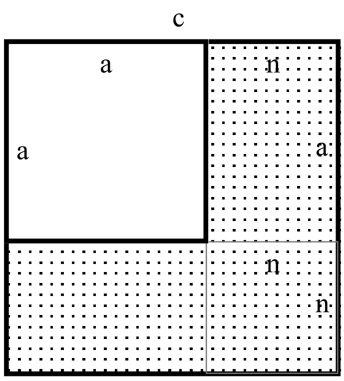
Pythagoräische Zahlentripel

Ein Zahlentripel a : b : c nennen wir pythagoräisch, wenn a, b und c natürliche Zahlen sind, welche den "Satz von Pythagoras" erfüllen:
$a^2 + b^2 = c^2$. Sind a, b, c paarweise teilerfremd, nennen wir das Tripel zusätzlich "primitiv".

Gesucht ist eine Methode, mit der man *alle* möglichen pythagoräischen Zahlentripel erzeugen kann.

Wir geometrisieren das Problem so, wie es die alten Griechen getan haben:



Wir setzen an das Quadrat mit der Fläche a^2 einen "Winkel", einen sogenannten "Gnomon", an (gerasterte Fläche), um ein grösseres Quadrat der Fläche c^2 zu erhalten. Soll ein pythagoräisches Tripel entstehen, muss notwendigerweise die Gnomonfläche eine Quadratzahl, sagen wir m^2, sein.

Für ein pythagoräisches Tripel ist also folgendes notwendig:
Es existieren natürliche Zahlen m und n, m > n, mit $2an + n^2 = m^2$.
Daraus folgt a = $\frac{m^2 - n^2}{2n}$ und c = a + n = $\frac{m^2 + n^2}{2n}$.

Satz 1:
Ein pythagoräisches Zahlentripel hat notwendigerweise die Form

$$m \quad : \quad \frac{m^2 - n^2}{2n} \quad : \quad \frac{m^2 + n^2}{2n}$$

Beispiele:

a)	m = 12, n = 6:	12	:	9	:	15
b)	m = 6, n = 4:	6	:	2.5	:	6.5

Beispiel b) zeigt, dass die Bedingung noch nicht hinreichend ist. Gewisse Wahlen von m und n erzeugen keine ganzzahligen Tripel.
Natürlich können wir aus Beispiel b) sofort ein pythagoräisches Tripel gewinnen, indem wir mit 2 erweitern. Wir erhalten das bekannte Tripel 12 : 5 : 13.

Aus Satz 1 können wir die Nenner durch Erweitern fortschaffen. Die entstehenden Zahlentripel wollen wir -da die alten Babylonier sie bereits gekannt hatten- der Kürze halber "babylonisch" nennen:

Satz 2:
Jedes pythagoräische Zahlentripel lässt sich erweitern zu einem babylonischen Tripel

$$2mn \quad : \quad (m^2 - n^2) \quad : \quad (m^2 + n^2)$$

Nun haben wir zwar die Nenner zum Verschwinden gebracht, dafür erhalten wir mit dieser Formel allenfalls nur "erweiterte" Tripel, die wir dann noch geeignet kürzen müssen, um primitive Tripel zu erhalten.
Die Formel nach Satz 2 erzeugt nicht mehr *alle* möglichen Tripel. So ist etwa das Tripel 12 : 9 : 15 nicht mehr babylonisch wie folgende Überlegung zeigt:
$2mn = 12 \Longrightarrow mn = 6$. Da 9 und 15 ungerade sind, müssen m und n von entgegengesetzter Parität sein. Es ergeben sich die Fälle m = 6, n = 1 und m = 3, n = 2. Fall 1 liefert das Tripel 12 : 35 : 37, Fall 2 das Tripel 12 : 5 : 13. Das Tripel 12 : 9 : 15 wird auf diese Weise nicht erzeugt.
Wir finden das Tripel 12 : 9 : 15 auf andere Art: Zunächst erzeugen wir durch die Wahl m = 2, n = 1 das Tripel 4 : 3 : 5 und anschliessend durch Erweitern mit 3 das gesuchte Tripel 12 : 9 : 15.

Fassen wir alle Tripel, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen zu je einer Äquivalenzklasse zusammen, so liefert Satz 2 immerhin für jede Äquivalenzklasse mindestens einen Repräsentanten (wenn auch nicht unbedingt den primitiven).
Satz 2 ist somit bereits recht brauchbar: Wir wählen m und n, erzeugen ein babylonisches Tripel und kürzen dieses zu einem primitiven Tripel. Wir erhalten also mit Hilfe von Satz 2 *kombiniert mit Erweitern und Kürzen alle* möglichen pythagoräischen Zahlentripel.

Schön wäre es, wenn wir Satz 2 so verschärfen könnten, dass wir *alle primitiven* Tripel erhielten. Bereits Diophantes hat gezeigt, dass dies möglich ist.

Satz 3:

a) Lässt sich ein babylonisches Tripel mit einem Primfaktor p ≠ 2 kürzen, so lässt es sich auch mit p^2 kürzen, womit die babylonische Struktur erhalten bleibt.

b) Lässt sich ein babylonisches Tripel mit 2 kürzen, so ist das gekürzte Tripel wieder babylonisch.

Beweis:

a) 2mn; m^2 - n^2; $m^2 + n^2$ sei kürzbar mit p ≠ 2, p prim. Dann gilt:
p | m oder p | n und p | m^2 - n^2. Es folgt sofort, dass p sowohl m wie n teilt. Dann teilt auch p^2 alle drei Elemente des Tripels.
Das gekürzte Tripel $\frac{2\,\mathrm{mn}}{p^2}$; $\frac{m^2 - n^2}{p^2}$; $\frac{m^2 + n^2}{p^2}$ hat wieder babylonische Form
2xy; x^2 - y^2; $x^2 + y^2$ vermöge x = : $\frac{m}{p}$ und y: = $\frac{n}{p}$.

b) 2mn; m^2 - n^2; $m^2 + n^2$ sei kürzbar mit 2. m und n müssen dann gleiche Parität haben.
$\frac{2\,\mathrm{mn}}{2}$; $\frac{m^2 - n^2}{2}$; $\frac{m^2 + n^2}{2}$ hat wieder babylonische Struktur vermöge
x: = $\frac{m+n}{2}$, y: = $\frac{m-n}{2}$:
Es folgt nämlich x^2 - y^2 = mn; 2xy = $\frac{m^2 - n^2}{2}$; $x^2 + y^2 = \frac{m^2 + n^2}{2}$.
Der erste und zweite Term haben dabei ihre Rolle getauscht.
Man beachte, dass x und y wegen der gleichen Parität von m und n tatsächlich natürliche Zahlen sind. ■

Gegenbeispiel:
Erweitern oder Kürzen mit einem nicht-quadratischen Faktor, z.B. mit Faktor 3, erhält die babylonische Struktur nicht unbedingt, wie das nicht-babylonische Tripel 12 : 9 : 15 zeigt.

Satz 4:
Jedes primitive pythagoräische Tripel wird erhalten durch

$$2mn \quad : \quad (m^2 - n^2) \quad : \quad (m^2 + n^2),$$

wobei m, n $\in \mathbb{N}$, m > n, m, n teilerfremd und von entgegengesetzter Parität.

Beweis:
Wir gehen aus von einem beliebigen primitiven pythagoräischen Tripel. Nach Satz 2 existiert davon eine babylonische Erweiterung, welche sich nach Satz 3 unter Erhaltung der Eigenschaft "babylonisch" wieder zum ursprünglichen primitiven Tripel kürzen lässt. Durch das Kürzen enstehen die in Satz 4 genannten Zusatzbedingungen für m und n. ■

Einige Folgerungen

● In jedem pythagoräischen Tripel kommen eine durch 3, eine durch 4 und eine durch 5 teilbare Zahl vor (die Eigenschaften können sich in einer der Zahlen kumulieren).
● Die Flächeninhalte aller pythagoräischen Dreiecke sind stets ein Vielfaches von 6.
● Das Produkt der 3 Zahlen ist durch die Summe der 3 Zahlen ohne Rest teilbar.

Verbindung zur Philosophie der Mathematik

In obigen Überlegungen wurde die Eigenschaft "babylonisch" eingeführt. Inwiefern "existiert" eine solche Eigenschaft?
Die "babylonische" Struktur 2mn; $m^2 - n^2$; $m^2 + n^2$ wäre vollkommen uninteressant, wenn sie rein "zufällig" an einigen Tripeln aufträte, etwa als Folge einer speziellen Zahlenwahl. Was uns dazu führt, die Eigenschaft "babylonisch" als relevant, als "existierend" anzusehen, ist die Tatsache, dass sie unter bestimmten Operationen (hier unter Erweitern bzw. Kürzen mit Faktoren p^2 bzw. 2) *erhalten bleibt*. Sie ist eine *Invariante* unter diesen Operationen. Mathematische "Dinge" oder "Eigenschaften" existieren hier also weder auf eine mystisch-platonische noch auf eine willkürlich-nominalistische Art und Weise, sondern einfach als Invarianten unter bestimmten Operationen. Die Existenz wird also struktur-immanent begründet.