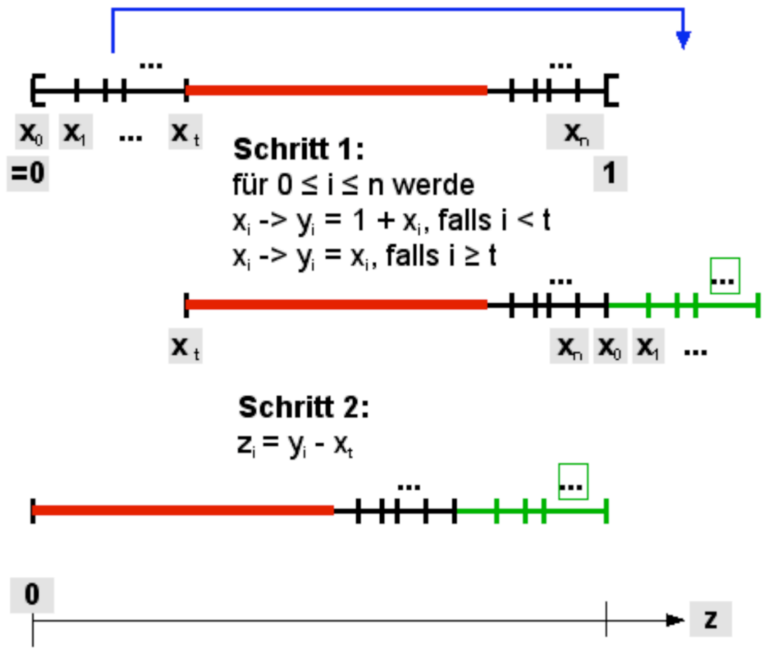
Stab mit n zufälligen Bruchstellen



Wir betrachten den Fall, dass *kein* Polygon gebildet werden kann, d.h. dass nach einer bestimmten Bruchstelle x_t ein "Sperrintervall" von (mindestens) Länge 1/2 erscheint, das keine Bruchstelle enthält (rotes Intervall im Bild).

Seien x_1, ..., x_n die n Bruchstellen. Sei x_0 = 0. Sei x_t die Bruchstelle, nach welcher das Sperrintervall erscheint.
Wir können ohne Weiteres den linken Teil *vor* x_t abschneiden und rechts anhängen. Dem entspricht Schritt 1 einer Koordinatentransformation von [0; 1[:
Für 0 ≤ i ≤ n werden die Koordinaten der Bruchstellen wie folgt in neue Koordinaten y_i transformiert:

$\boxed{y_i = 1 + x_i, \text{ falls } i < t}$ (Alle Bruchstellen *vor* x_t werden nach rechts verschoben.)

$\boxed{y_i = x_i, \qquad \text{falls } i \geq t}$ (x_t und die Bruchstellen rechts davon bleiben.)
Wir transformieren das halboffene Intervall [0; 1[.

Nun schieben wir das derart umgruppierte Stück um x_t nach links, d.h. wir transformieren in einem 2. Schritt wie folgt:

$\boxed{z_i = y_i - x_t \text{ für alle } 0 \leq i \leq n}$ Damit gelangen alle Koordinaten wieder ins Intervall [0;1[.

Die gesamte Transformation sieht so aus:

$\boxed{z_i = 1 + x_i - x_t \text{ falls } i < t}$

$\boxed{z_i = x_i - x_t, \quad \text{falls } i \geq t.}$

Man beachte, dass nun z.B. der ursprüngliche Punkt $x_0 = 0$ die neue Koordinate $1 - x_t$ bekommt. x_t selber erhält die neue Koordinate 0.

Würfelt man nun Zufalls-Bruchstellen x_1, ..., x_n, so sind die z_i davon abhängige Zufallszahlen, die nach dem untersten Teilbild mit Ausnahme von z_t alle rechts der Mitte liegen. Auch z_0 liegt rechts der Mitte.
Die Wahrscheinlichkeit,dass diese n Zufallszahlen (nämlich z_0, ... , $z_{t-1}, z_{t+1}, \ldots, z_n$) im Intervall $[\frac{1}{2}; 1[$ liegen, beträgt $\frac{1}{2^n}$.

Nun kann das Sperrintervall bei n Bruchstellen an n+1 Stellen liegen, d.h. für t sind die Werte 0 bis n möglich.
Die Wahrscheinlichkeit, dass *kein* Polygon gebildet werden kann, beträgt somit $\frac{(n+1)}{2^n}$.
Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, d.h. des Falles, dass ein Polygon gebildet werden kann, beträgt dann

$$p(\text{"(n+1)-Eck möglich"}) = 1 - \frac{(n+1)}{2^n}.$$