

Sei  $m$  die Zeilennummer der unteren Pyramidenspitze (Zeilennummerierung von Zeile 0 bis Zeile  $m$ ). Sei  $m = 3^r, r = 1, 2, 3, \dots$  (Eine Pyramide mit unterster Zeilennummer  $m$  hat somit  $m+1$  Zeilen.)

**Bildungsgesetz B** für den Eintrag von Werten: Der Wert eines Kästchens in einer Pyramidenzeile ist die Summe der beiden darüber liegenden Werte **modulo 3**.

Zeile 0 hat die Werte  $x_1, x_2, x_3, \dots$

**Eigenschaft E:** Der Wert der Pyramidenspitze unten (Zeile  $m$ , gelber Punkt unten) ergibt sich direkt als Summe der Eckwerte der Zeile 0 (gelbe Punkte oben). Alle Werte dazwischen, dargestellt durch den grün eingefärbten Bereich, müssen nicht berücksichtigt werden.

E ist gleichbedeutend damit, dass im Pascalschen Dreieck in Zeile  $m$  die Nichttrand-Binomialkoeffizienten modulo 3 gleich 0, d.h. durch 3 teilbar sind.

**Behauptung:** E trifft zu für alle  $m = 3^r, r = 1, 2, 3, \dots$

Beweis durch Induktion nach  $r$ .

Induktionsverankerung:  $r = 1$ , d.h.  $m = 3^1$ : Für die Pyramide mit Zeilen 0 bis 3 trifft die Eigenschaft E zu.

Induktionsschritt: Treffe E zu für  $m = 3^{r-1}$ . Dann bilden wir aus dieser Pyramide eine grössere gemäss Bild unten. Diese grössere Pyramide hat die Zeilennummern 0 bis  $3^r$ . Betrachten wir darin nur die gelben Werte, so bilden diese eine Pyramide mit Zeilen 0 bis 3, die das Bildungsgesetz B erfüllen. Folglich besitzt auch die grössere Pyramide gemäss Induktionsverankerung die Eigenschaft E.

