Urs Vonesch

Ein Auslose-Spiel mit Jasskarten

Quelle: Kit Yates: Wie man voraussieht, womit keiner rechnet, Piper 2024, ISBN 978-3-492-07251-9

Wir nehmen ein Schweizer Jasskartenset mit 36 Karten (9 Karten in je 4 Farben).
A spielt gegen B. B darf zwei Werte wählen, z.B. König und Ass. Das Spiel wird gemischt und dann aufgeblättert. A gewinnt, wenn mindestens einmal König und Ass benachbart vorkommen, egal ob zuerst König oder zuerst Ass. Andernfalls gewinnt B. Statt König und Ass kann von B jedes andere Wertepaar gewählt werden, in jedem Durchgang, wenn gewünscht, ein neues.

Die Wahrscheinlichkeitsanalyse ist sehr verzwickt, da sehr viele Fallunterscheidungen nötig sind. Wir begnügen uns mit Schätzungen. A scheint einen leichten Vorteil zu haben, da erstaunlich häufig solche Nachbarschaften auftreten.

Wir wählen als Paar für die Analyse die 6 und die 7. B darf aber jedes andere Wertepaar wählen.

Den vier Sechsen werden ihre Plätze per Zufall zugewiesen. Es entstehen folgende Fälle:

Die Sechsen liegen so locker verteilt im 36er-Auslegeraster, dass bei jeder 6 links und rechts eine 7 angedockt werden könnte, d.h. es entstehen 8 Andockplätze für die vier Siebner-Karten.
Bei andern Verteilungen der vier Sechsen entstehen nur 7, 6, 5, 4, 3, 2 Andockplätze oder gar nur einer.

<u>Der Fall mit 8 Andockplätzen:</u>
Die Sechsen liegen hier locker mit mindestens zwei Leerstellen dazwischen. Zudem sind die Enden der Kette nicht belegt: . 6 . . 6 . . 6 . . 6 .
Die kleinen Punkte zeigen die 8 Andockstellen.
Von den 36 Plätzen sind nun vier von den Sechsen belegt. Es bleiben 32 Pünktchen frei.
Wir betrachten das Gegenereignis «B gewinnt», d.h. die vier Siebnerkarten werden nicht angedockt, d.h. landen nicht auf den 8 Andockstellen. Es bleiben 32 – 8 = 24 Nicht-Andockstellen für die Siebnerkarten.
Die erste Siebnerkarte, die ja *nicht* andocken soll, hat 24 günstige Felder von 32 freien Feldern.
Die zweite Siebnerkarte hat dann noch 23 günstige Felder von 31 noch freien Feldern, usw.
Wir rechnen also (24/32)(23/31)(22/30)(21/29) = 29.5%. Die Gegenwahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, dass also *mindestens eine* 7 angedockt ist, beträgt dann 100% - 29.5% = **70.5%**.
Liegen die Sechsen also derart locker, wird sehr häufig eine 7 angedockt werden.
Leider ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sechsen derart locker liegen nur etwa 31.8%, wie wir sehen werden.
Die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass A via 8 Andockplätze gewinnt, ist somit **22.4%**.

Analog berechnen wir die Andock-Wahrscheinlichkeiten für die Fälle, dass die vier Sechsen
7, 6, … , 1 Andockstellen bereit stellen:

Andockstellen	**Wahrscheinlichkeit für's Andocken mindestens einer 7 an eine 6:**
8	1 - (24/32)(23/31)(22/30)(21/29) = 70.5%
7	1 - (25/32)(24/31)(23/30)(22/29) = 64.8%
6	1 - (26/32)(25/31)(24/30)(23/29) = 58.4%
5	1 - (27/32)(26/31)(25/30)(24/29) = 51.2%
4	1 - (28/32)(27/31)(26/30)(25/29) = 43.1%
3	1 - (29/32)(28/31)(27/30)(26/29) = 34.0%
2	1 - (30/32)(29/31)(28/30)(27/29) = 23.8%
1	1 - (31/32)(30/31)(29/30)(28/29) = 12.5%

Das Berechnen der A-priori-Wahrscheinlichkeiten, d.h. der Wahrscheinlichkeiten, dass diese Verteilsituation der vier Sechsen entsteht, ist nun sehr kompliziert.
Tatsache ist, dass die Varianten mit 3, 2, 1 Andockstellen fast nie auftreten (Wahrscheinlichkeit nahe null).

Anstelle der sehr variantenreichen Berechnung simulieren wir das Mischen der 36 Karten mit Hilfe von Pseudozufallszahlen einer Tabellenkalkulation. Wir verwendeten das frei zugängliche LibreOffice.

Wir programmieren wie folgt:
Spalte A: A1 bis A36: Jedes Feld wird mit einer Pseudozufallszahl belegt: ZUFALLSZAHL().
Dies legt eine zufällige Rangordnung (Ränge 1 bis 36) der Daten fest, wenn die Zufallszahlen im folgenden Schritt der Grösse nach geordnet werden.
Spalte B: B1 bis B36: Zunächst 4 (rot markierte) Werte 6, dann 4 (grün markierte) Werte 7, restliche 24 Zeilen leer (da uns der Inhalt dieser Jasskarten nicht interessiert). Dann aktivieren wir den Bereich A1 bis B36 und wählen DATEN → AUFSTEIGEND SORTIEREN. Dadurch werden die Einträge der Spalte B an die durch die zugeordnete Pseudozufallszahl bestimmte Rangstelle verschoben, d.h. es entsteht eine «Kartenmischung».
Gleichzeitig entstehen in Spalte A automatisch neue Pseudozufallszahlen für den nächsten Schritt, der wiederum aus dem Sortierbefehl besteht. Aus der alten Mischung entsteht dann wieder eine neue, usw.

Wir beobachten nach jedem Mischvorgang die Lage der roten und grünen Zahlen 6 und 7 und notieren, ob es Rot-Grün-Nachbarschaften gegeben hat («A gewinnt») oder nicht («B gewinnt»). Ebenfalls können wir jedes Mal auswerten, ob 8, 7, 6, … Andockstellen um die roten Sechsen herum entstanden sind.

Hier einige empirische Werte (die natürlich jedes Mal ein wenig variieren), n = 100 Durchgänge:

Anzahl Andockstellen	**Häufigkeit in % in 100 Versuchen**	**Verrechnet mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten oben:**
8	32	32% von 70.5% = ca. 22.5%
7	29	29% von 64.8% = ca. 18.8%
6	25	25% von 58.4% = ca. 14.6%
5	11	11% von 51.2% = ca. 5.6%
4	3	3% von 43.1% = ca. 1.3%
< 4	0	0%

Es ergibt sich eine totale Wahrscheinlichkeit für den Sieg von A von ca. 63%.
A hat somit offenbar einen Vorteil bei diesem Spiel, was erstaunlich scheint.

Beim Spiel mit wirklichen Karten und Mischen von Hand können allerdings erhebliche Abweichungen von diesen Resultaten entstehen, z.B. als Folge von unzureichendem Mischen.

Im Spiel müssen nicht immer Sechser- und Siebnerkarten gewählt werden. B kann jedes Mal zwei beliebige Werte nennen (von 6 bis Ass). Natürlich muss man auf sehr gutes Mischen achten.

Anhang: Abschätzen der Wahrscheinlichkeit, dass die vier Sechsen 8 Andockplätze schaffen:
* * * (* 6 *) * * * * * * (* 6 *) * * * * * * * * * (* 6 *) * * * * * * * * (* 6 *) * *
Die zwei Randfelder fallen weg. Für die erste 6 bleiben 34 Felder von 36.
Links und rechts der gesetzten 6 muss eine Leerstelle bleiben. Auch die an diese beiden Leerstellen links und rechts angrenzenden Felder können nicht weiter belegt werden (violett markiert).
Für die zweite 6 bleiben somit noch 34 – 5 = 29 günstige Felder von 35, für die dritte 24 von 34 und für die vierte 19 von 33. Wir rechnen: (34/36)(29/35)(24/34)(19/33) = 31.8%. Dies entspricht ziemlich genau dem empirisch erhaltenen Wert von 32% (s. Tabelle oben).

Anhang 2: Simulation mit Tabellenkalkulation (LibreOffice)

Spalte A: Pseudozufallszahlen, Spalte B: 4 Sechsen (rot) und 4 Werte 7 (grün), die bei jedem Befehl DATEN → AUFSTEIGEND SORTIEREN neu gemischt werden. Die Kartenwerte ≠6 und ≠7 sind durch Leerfelder in Spalte B dargestellt, da wir diese Werte nicht kennen müssen.
Im Bild eine Misch-Situation ohne Rot-Grün-Berührung («B gewinnt») und mit 6 Andockplätzen bei den Sechserkarten. Spalte A zeigt jedoch bereits die neuen Pseudozufallszahlen für den nächstfolgenden Mischvorgang, da bei jedem Änderungsbefehl die Zufallszahlen sofort neu gebildet werden.

A1:B36 | fx Σ = =ZUFALLSZAHL()

	A	B	C
1	0.38		
2	0.06		
3	0.21		
4	0.96		
5	0.90		
6	0.04		
7	0.08		
8	0.13		
9	0.72		
10	0.29		
11	0.58	6	
12	0.03		
13	0.54		
14	0.69		
15	0.92		
16	0.52	6	
17	0.83		
18	0.62	7	
19	0.34		
20	0.97	7	
21	0.07		
22	0.35		
23	0.32		
24	0.25	6	
25	0.13	6	
26	0.08		
27	0.47		
28	0.28		
29	0.70		
30	0.59		
31	0.63		
32	0.25	7	
33	0.65		
34	0.74	7	
35	0.59		
36	0.73		