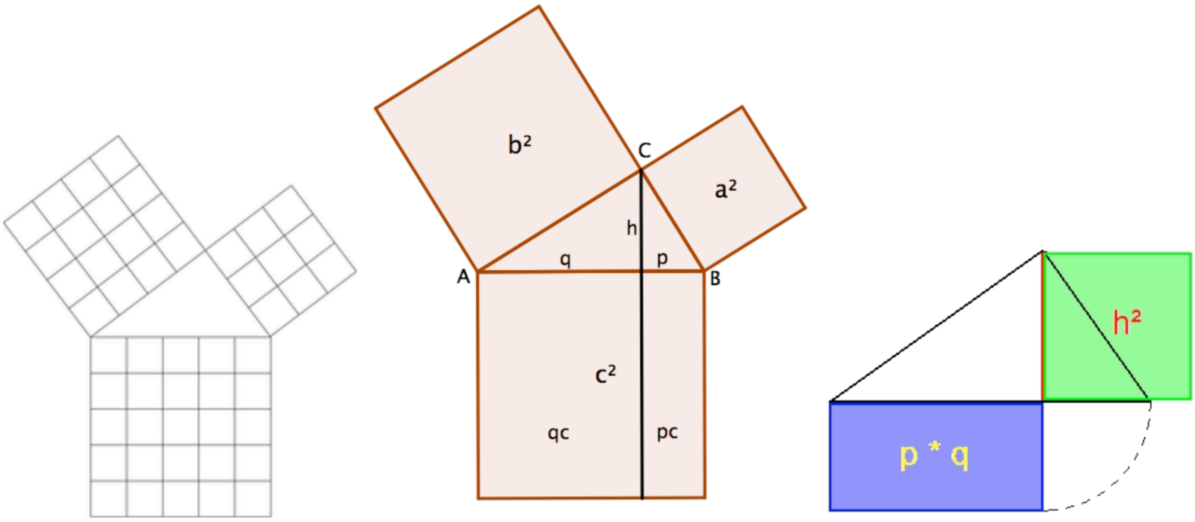
Pythagoras & Co

5.1. Einleitung



Pythagoras von Samos wurde um 570 v. Chr. geboren. Der nach ihm benannte Satz war bereits früher bekannt. Pythagoras zeigte, dass es unendlich viele rechtwinklige Dreiecke mit *ganzzahligen* Seitenlängen gibt ("pythagoräische Dreiecke").
Hier sind die Formeln von Diophantes von Alexandria (um 250 n.Chr.) mit Hilfe derer man unendlich viele solche Dreiecke erzeugen kann:

a = 2xy **b =** $x^2 - y^2$ **c =** $x^2 + y^2$.

Für x und y wähle man zwei teilerfremde natürliche Zahlen, x > y.
Mit diesen Formeln lassen sich sogar *alle* pythagoräischen Zahlentripel erzeugen, indem man gefundene Tripel allenfalls noch erweitert oder kürzt.

Beispiel: x = 4, y = 3 $\Longrightarrow$ a = 24, b = 7, c = 25. Es ist tatsächlich $24^2 + 7^2 = 25^2$.
Das Dreieck mit den Seitenlängen 24, 7 und 25 ist ein rechtwinkliges Dreieck.

Das bekannteste "pythagoräische Dreieck" ist das Dreieck mit den Seitenverhältnissen 3 : 4 : 5 (Bild oben links). Eine Schnur, die durch Knoten in 12 gleichlange Abschnitte geteilt wird, kann so in der Feldmessung zur Erzeugung eines rechten Winkels dienen (siehe Bild oben links).

Ein weiteres bekanntes pythagoräisches Dreieck ist dasjenige mit den Seitenverhältnissen 5 : 12 : 13.

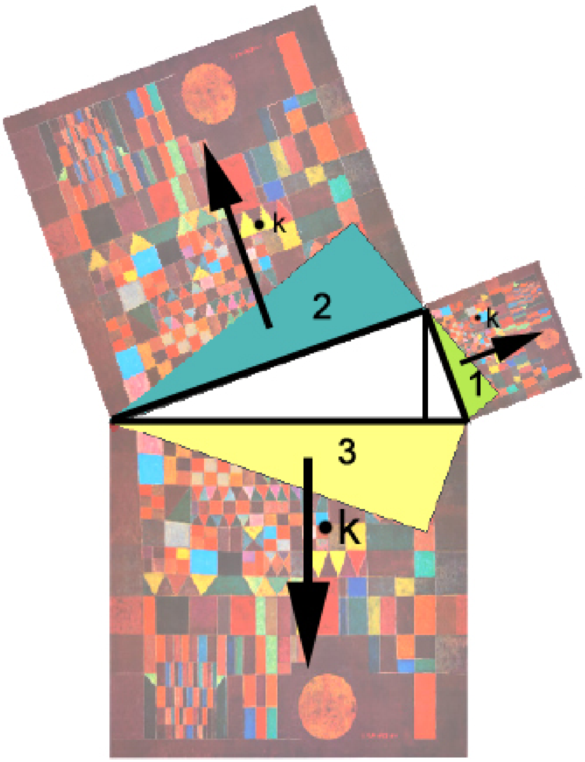
Hier sind einige teilerfremde pythagoräische Zahlentripel:

3	5	8	7	20	12	9	28	11	16	33
4	12	15	24	21	35	40	45	60	63	56
5	13	17	25	29	37	41	53	61	65	65

5.2. Herleitungen für Höhensatz, Kathetensätze und Satz von Pythagoras

5.2.1. Ein bildlicher Beweis für den Satz von Pythagoras

Gegeben ist das weisse rechtwinklige Dreieck, in welchem wir noch die Höhe h_c einzeichnen. **Die dadurch entstehenden drei Teildreiecke sind winkelgleich und somit ähnlich zueinander**. Wir klappen sie nach aussen wie es das Bild zeigt. Ihre Fläche ist ein bestimmter Bruchteil, sagen wir $\frac{1}{k}$, der zugehörigen Quadratfläche.



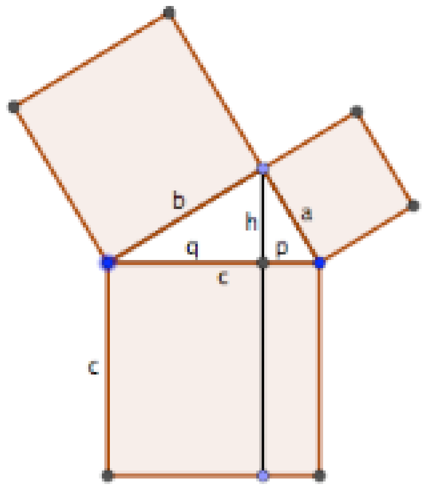
Wir haben

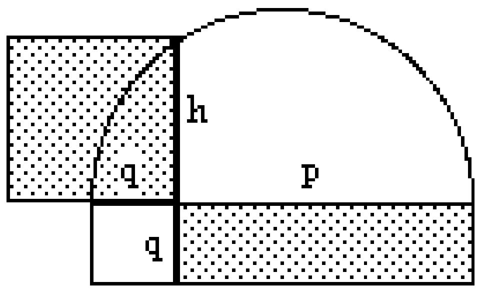
$$A_1 + A_2 = A_3 \quad | \bullet \text{k} \quad \Longrightarrow$$
$$\text{k}\bullet A_1 + \text{k}\bullet A_2 = \text{k}\bullet A_3 \quad \Longrightarrow$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

5.2.2. Zusammenfassung der Sätze am rechtwinkligen Dreieck

Aufgabe

Wenn man im rechtwinkligen Dreieck die Höhe h einzeichnet, entstehen drei zueinander ähnliche Dreiecke.
Erstellen Sie möglichst viele Ähnlichkeitsbeziehungen und wandeln Sie diese in Produktsätze um ("Innenprodukt = Aussenprodukt").





Höhensatz: $\quad \mathrm{q} \bullet \mathrm{p} = h^2$

Kathetensätze: $\quad \mathrm{p} \bullet \mathrm{c} = a^2$

$\mathrm{q} \bullet \mathrm{c} = b^2$

$\mathrm{c}(\mathrm{p} + \mathrm{q}) = a^2 + b^2$

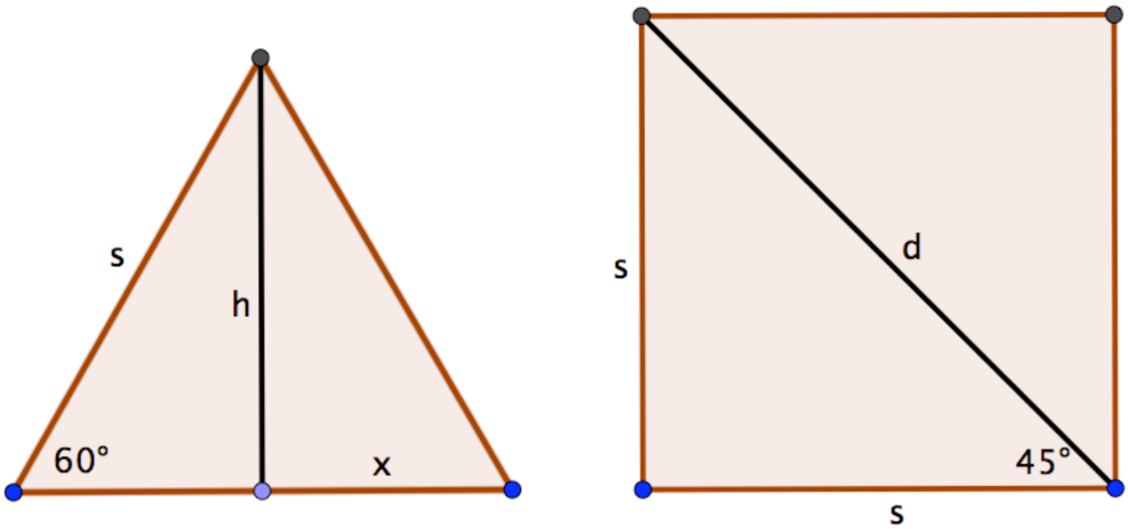
Satz von Pythagoras: $\quad c^2 \quad = \; a^2 \; + \; b^2$

Flächensatz: $\quad 2\mathrm{A} = \mathrm{a} \bullet \mathrm{b} = \mathrm{c} \bullet \mathrm{h}$

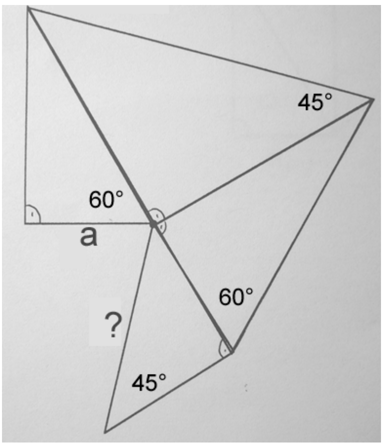
$\Longrightarrow \mathrm{h} = \frac{a \bullet b}{c} = \frac{\mathrm{a} \bullet \mathrm{b}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5.3. Gleichseitiges Dreieck, halbes gleichseitiges Dreieck, Quadrat, 45°-45°-90°-Dreieck

Lernen Sie die Beziehungen am gleichseitigen Dreieck und am gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck auswendig:



Aufgabe
Zeichnen Sie Ketten aneinanderhängender 30°-60°-90°- und 45°-45°-90°- Dreiecke. Bezeichnen Sie eine Seite mit a und drücken Sie alle übrigen Seiten durch a aus. Erfinden Sie mehrere solche Aufgaben. Tauschen Sie diese untereinander aus.
Beispiel:

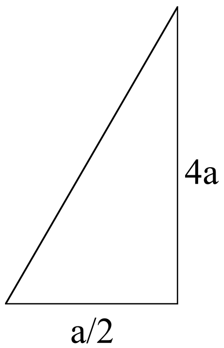


5.4. Umgehen mit Wurzeln ("exakte Lösungen")

Aufgabe

Wählen Sie verschiedene rechtwinklige Dreiecke, von denen Sie zwei Seitenlängen mit einem Parameter a kennen. Berechnen Sie die dritte Seite *exakt*.

Beispiel:



$$c = \sqrt{16\,a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{16\,a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{64\,a^2 + a^2}{4}} = \sqrt{\frac{65\,a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{65}}{2}$$

5.5. Räumlicher Pythagoras

Aufgaben

a) Berechnen Sie die Körperdiagonale eines Zimmers mit den Massen a, b und c.
Das Resultat wird **räumlicher Pythagoras** genannt.

b) Berechnen Sie die Länge der Körperdiagonale eines Würfels mit Kantenlänge a.

5.6. Einfachere Einführungsaufgaben zu den Sätzen im rechtwinkligen Dreieck

5.6.1. Dreiecke: Fehlende Stücke berechnen

1. Rechtwinkliges Dreieck:

	a	**b**	**c**	**h**	**q**	**p**	**A**
a)	7	24					
b)					$\frac{25}{13}$	$\frac{144}{13}$	
c)		$\sqrt{5}$				4	
d)				2			8.5

2. Gleichseitiges Dreieck

	a	**h**	**A**
a)	6		
b)		$\sqrt{5}$	
c)			$15\sqrt{3}$

3. Gleichschenkliges Dreieck mit Spitze C, Basis c, Schenkel a = b

	a	**c**	h_a	h_c	**A**
a)		5		5	
b)	$\sqrt{29}$			5	

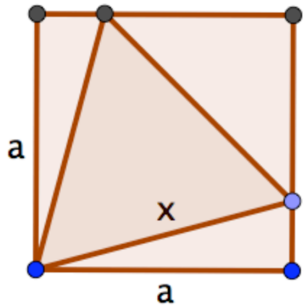
5.6.2. Diagonalen berechnen (Lösungswege im Anhang)

4. Berechnen Sie die Länge der Diagonalen in
a) einem Quadrat mit a = 5 b) einem Rechteck mit a = 8, b = 6
c) einem Rhombus mit a = 15 und e : f = 3 : 4
d) einem gleichschenkligen Trapez mit a = 28, b = d = 17, c = 12
e) einem Parallelogramm mit a = 28, b = 15, h_a = 9.

5.6.3. Weitere Einführungsaufgaben (Lösungswege im Anhang)

5a) Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck hat Umfang 30. Wie lang sind die Seiten?
b) In einem gleichschenkligen Dreieck sei die Basis halb so lang wie ein Schenkel. Der Flächeninhalt beträgt $\sqrt{15}$. Wie gross ist der Umfang?
c) Die Diagonalen in einem Rhombus messen 10 und 24. Gesucht sind Seitenlänge und Inkreisradius.
d) Ein Rechteck hat Umfang 34. Der Umkreisradius beträgt 6.5. Wie lang sind die Seiten?
e) In einen Trichter mit Öffnungswinkel 60° fällt ein Ball mit 10 cm Durchmesser. Wie weit sind Trichterspitze und Ballmittelpunkt voneinander entfernt?
f) Von einer quadratischen Platte mit Seitenlänge a werden vier Dreiecke so abgesägt, dass ein regelmässiges Achteck entsteht. Berechnen Sie die Seitenlänge x des Achtecks und seinen Flächeninhalt (in der Form A = k•a^2, k auf 3 Dez.).

g) Geg: Quadrat mit Seitenlänge a. Es wird ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, dessen eine Ecke mit einer Quadratecke zusammenfällt. x = ?



Lösungen

1. Rechtwinkliges Dreieck:

	a	b	c	h	q	p	A
a)	7	24	25	6.72	23.04	1.96	84
b)	12	5	13	$\frac{60}{13}$	$\frac{25}{13}$	$\frac{144}{13}$	30
c)	$\sqrt{20}$	$\sqrt{5}$	5	2	1	4	5
d)	$\frac{\sqrt{17}}{2}$	$2\sqrt{17}$	8.5	2	8	0.5	8.5

2. Gleichseitiges Dreieck

	a	h	A
a)	6	$3\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$
b)	$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{5}$	$\frac{5}{\sqrt{3}}$
c)	$2\sqrt{15}$	$3\sqrt{5}$	$15\sqrt{3}$

3. Gleichschenkliges Dreieck mit Spitze C, Basis c, Schenkel a = b

	a	c	h_a	h_c	A
a)	$\frac{5\sqrt{5}}{2}$	5	$2\sqrt{5}$	5	12.5
b)	$\sqrt{29}$	4	$\frac{20}{\sqrt{29}}$	5	10

4. Diagonalen:

a) $5\sqrt{2}$ b) 10 c) 24; 18 d) 25 e) $\sqrt{337}$; 41

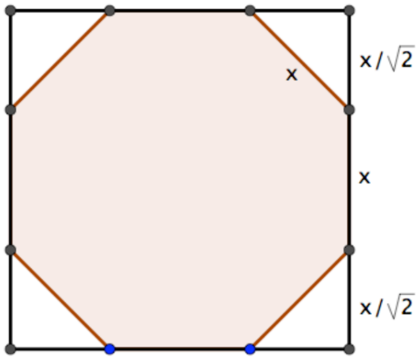
5. Weitere Aufgaben:

a) $\frac{30}{2+\sqrt{2}}$; $\frac{30\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ b) 10 c) 13; $\frac{60}{13}$ d) 5; 12

e) 10 f) $\frac{a}{1+\sqrt{2}}$; $2a^2(\sqrt{2} - 1)$

g) $\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x}{\sqrt{2}} = \text{a} \Longrightarrow x^2 - a^2 = \left(a - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 - \frac{2\,\text{ax}}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2} \Longrightarrow$
$x^2 + 2\text{a}\sqrt{2}\,\text{x} - 4a^2 = 0 \Longrightarrow \text{x} = \frac{-2\,a\sqrt{2} \pm \sqrt{8\,a^2 + 16\,a^2}}{2} = \text{a}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 1.035\text{a}.$

Lösungsweg zu f):

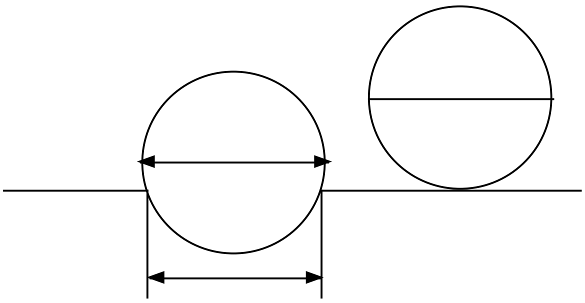


$\frac{x}{\sqrt{2}} + \text{x} + \frac{x}{\sqrt{2}} = \text{a} \Longrightarrow \text{x}\,(1 + \frac{2}{\sqrt{2}}) = \text{a} \Longrightarrow \text{x}\,(1 + \sqrt{2}) = \text{a} \Longrightarrow \text{x} = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$

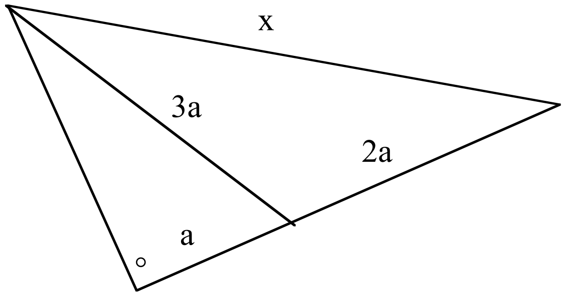
$\text{A} = a^2 - 2\bullet\frac{x}{\sqrt{2}}\bullet\frac{x}{\sqrt{2}} = a^2 - x^2 = a^2 - \frac{a^2}{(1+\sqrt{2})^2} = a^2 - \frac{a^2}{3+2\sqrt{2}} = a^2(1 - \frac{1}{3+2\sqrt{2}})$
$= a^2(\frac{3+2\sqrt{2}-1}{3+2\sqrt{2}}) = a^2(\frac{2+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}) \approx 0.828\,a^2.$

5.7. Weitere Aufgaben

1. Eine Kugel mit Radius 25 mm fällt in ein Loch mit 48 mm Durchmesser. Um wieviele mm sackt der Mittelpunkt der Kugel ein? (Resultat auf Zehntelsmillimeter.)



2. Drücken Sie x durch a aus:



3. Eine 2.5 m lange Leiter lehnt an einer Wand. der Leiterfuss ist 70 cm von der Wand entfernt. Wie hoch hinauf reicht die Leiter?

4. Ein 2 m langer Halm wird so geknickt, dass seine Spitze den Boden erereicht und zwar a cm vom Fusspunkt entfernt. Auf welcher Höhe befindet sich die Knickstelle? a) a = 0.4 m. b) a = a.

5. In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete dreimal so lang wie die andere. Die Hypotenuse misst 20 cm. Wie lang ist die kürzere Kathete?

---

6. **Die ganze Palette von Berechnungsaufgaben am rechtwinkligen Dreieck:**
Folgende 7 Stücke können gegeben oder gesucht sein (der rechte Winkel ist stets gegeben):
a b c h q p A.
Kennt man (neben dem rechten Winkel) zwei dieser Stücke, lassen sich die übrigen berechnen. Auf wieviele Arten kann man aus 7 Elementen 2 auswählen? Antwort: Auf $\binom{7}{2}$ = 21 Arten. Somit sind theoretisch 21 verschiedene Berechnungsaufgaben möglich.
Wählen Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen (s. z.B. Tabelle ganz am Anfang). Berechnen Sie alle 7 Stücke. Dies ist Ihr "Lösungsblatt".
Formulieren Sie nun mit diesen Zahlen möglichst viele verschiedene Berechnungsaufgaben. Geben Sie die fertigen Aufgaben mit Ihrem Namen versehen ab. Lösen Sie Ihre Aufgaben auch selber wieder auf. - Einige werden sehr einfach, andere eher schwierig sein. Taxieren Sie Ihre Aufgaben mit "einfach", "mittel", "schwierig".

Lösungen

1. 18 mm 2. $a\sqrt{17}$ 3. 240 cm 4. $x = \frac{4-a}{4}$ (in Metern) $= 1 - \frac{a}{4}$

5. $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

6. Schwierig ist z.B.: c = 5 cm, h = 2.4 cm. Gesucht: a und b.
(1): $a \cdot b = c \cdot h = 12$
(2): $a^2 + b^2 = 25$
Es folgt: $a^2 + 2ab + b^2 = 49 \Longrightarrow$ (3): $a + b = 7$ und
$a^2 - 2ab + b^2 = 1 \Longrightarrow$ (4): $a - b = 1$
$\Longrightarrow 2a = 8, a = 4, b = 3.$

5.8. $\sqrt{2}$- und $\sqrt{3}$-Aufgaben

1. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a. Wir gross ist der Inkreisradius?

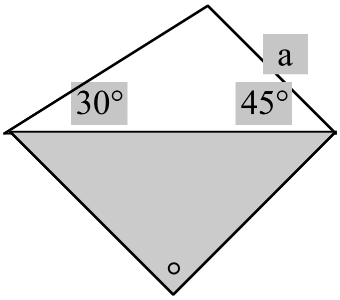
2. Gegeben ist der Umfang u eines 30°-60°-90°-Dreiecks. Wie lang sind die Seiten?

3. Einem Kreisbogen vom Radius r ist ein Hütchen mit Öffnungswinkel 120° aufgesetzt. Gesucht ist die Höhe des Hütchens (von der Sehne bis zur Spitze).

4. Trapez mit Seiten a, b, c, d. a = Grundseite, c = Deckseite.
Gegeben: c = 3•d, $\alpha = 45°$, $\beta = 150°$. Gesucht: a ausgedrückt durch d.

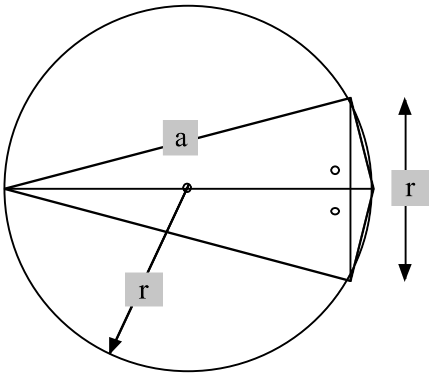
5. Einem 60°-Sektor mit Radius r ist der grösstmögliche Halbkreis so einbeschrieben, dass der Durchmesser auf einem Schenkel liegt und der Kreisbogen den andern Schenkel berührt. Berechnen Sie den Halbkreisradius aus r.

6.

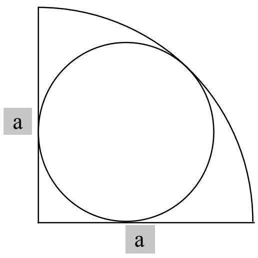


Berechnen Sie den Inhalt des punktierten Dreiecks aus a.

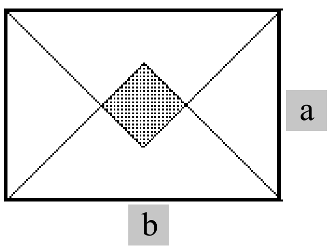
7*. Drücken Sie a durch den Radius r aus (r = Radius des Kreises).



8. Drücken Sie den Radius x des einbeschriebenen Kreises durch a aus:



9. Drücken Sie den Flächeninhalt des gerasterten *Quadrates* durch a und b aus:



10*. Einem Kreissektor mit Zentriwinkel 30° und Radius r ist ein Quadrat einbeschrieben, so dass eine Seite auf einem Sektorschenkel liegt.
Berechnen Sie die Seitenlänge x des Quadrates aus r.

Lösungen:

1. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

2. $x = \frac{u}{3+\sqrt{3}}$, $2x = \frac{2u}{3+\sqrt{3}}$, $x\sqrt{3} = \frac{u\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{u}{\sqrt{3}+1}$

3. $h = \frac{r}{2\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{6}$

4. $a = \frac{d}{\sqrt{2}} + 3d - \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

5. $x = \frac{r\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

6. $\frac{a^2(2+\sqrt{3})}{4}$

7. $a = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$

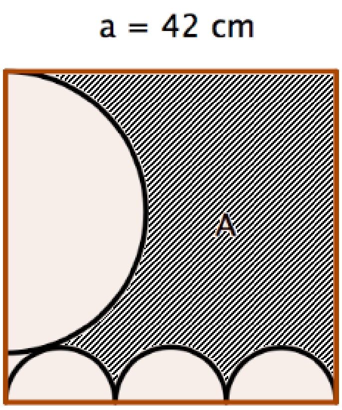
8. $x = \frac{a}{\sqrt{2}+1}$

9. $\frac{(b-a)^2}{2}$

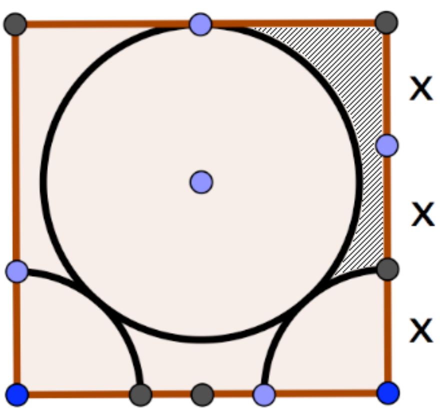
10. $x = \frac{r}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$

5.9. Kreisberühraufgaben

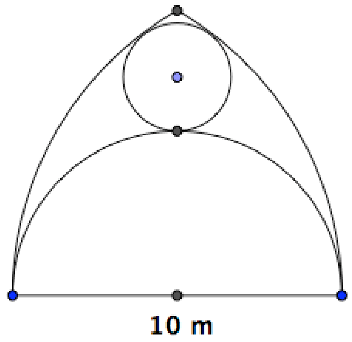
1a) Man bestimme den Radius y des grossen Halbkreises als Funktion von a.
b*) Man berechne die Fläche A für a = 42cm. Runden Sie auf cm^2 genau.



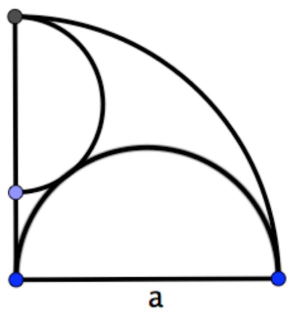
2a) Gesucht: Radius r des grossen Kreises ausgedrückt durch die Quadratseite a.
b*) Gesucht ist die schraffierte Fläche für a = 96 mm auf ganze mm^2 genau.



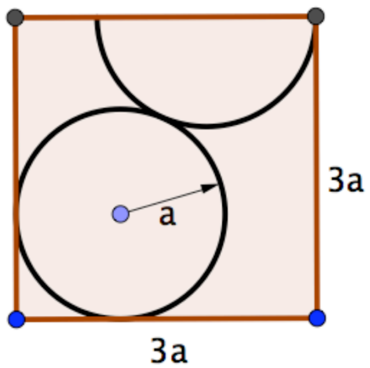
3. Ziehen Sie in der Figur Hilfslinien zu den Berührpunkten. Berechnen Sie dann den Radius r des kleinen, oberen Kreises. **(Grundaufgabe)**



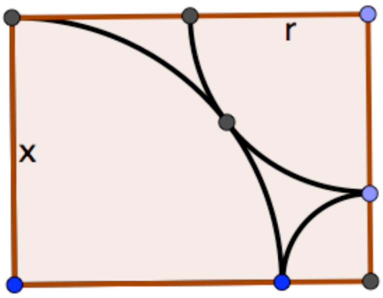
4. Gesucht ist der Radius des kleineren Halbkreises ausgedrückt durch a.
(Grundaufgabe)



5. Gesucht ist der Radius des Halbkreises ausgedrückt durch a. **(Maturaufgabe)**



6. Gesucht ist x ausgedrückt durch r (Variante: r = 16 cm). **(Maturaufgabe)**



Vorgehen bei Kreisberührungsaufgaben

- *Alle* Berührradien und Symmetrieachsen einzeichnen.
- Unbekannte x wählen. Alle Ergänzungsstrecken durch x ausdrücken und beschriften.
- Pythagoras *ohne Wurzeln* anwenden.

Lösungen

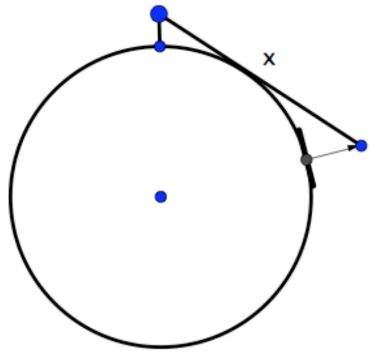
1a) $y = \frac{3a}{7}$ b) a = 42 cm, y = 18 cm, $A \approx 1018\ \text{cm}^2$

2a) $r = \frac{41a}{96}$ b) $883\ \text{mm}^2$

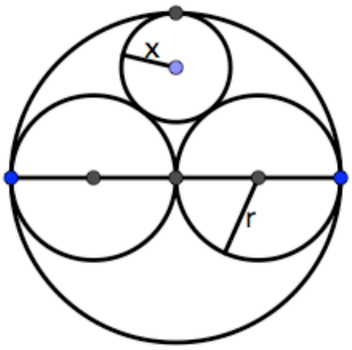
3. $r = \frac{5}{3}$ m 4. $\frac{a}{3}$ 5. $\frac{7a}{6}$ 6. $x = \frac{3r}{2}$

5.10. Weiteres Übungsmaterial

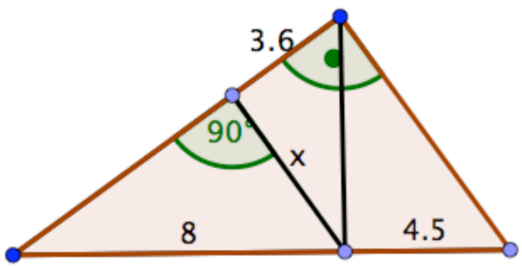
1. Eine Person (Augenhöhe 1.6 m über dem Strandboden) steht am Meer und sieht ein Segelschiff (Mastenhöhe 15 m) ins Meer hinausfahren. Die Sicht ist äusserst klar. Mit der Zeit scheint das Boot im Meer zu versinken, und schliesslich verschwindet auch die Mastspitze.
In welcher Distanz zu den Augen der Person befindet sich zu diesem Zeitpunkt die Mastspitze des Segelschiffs? (Erdradius = 6370 km)



2. Gesucht ist x (r). Resultat exakt.

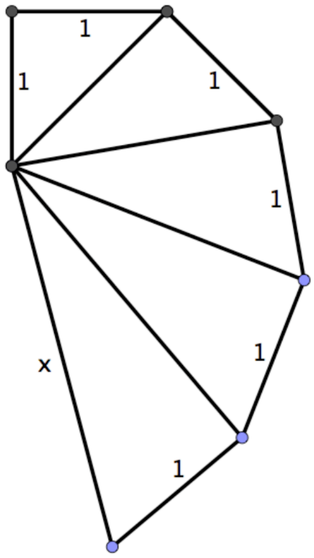


3. Gesucht ist x.

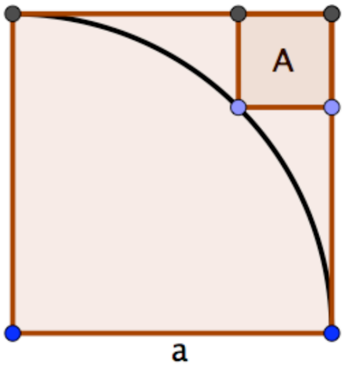


4. Diese Aufgabe führt auf eine quadratische Gleichung:
In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete 3 cm kürzer als die Hypotenuse. Die andere Kathete ist 3 cm kürzer als der 4. Teil der längeren Kathete. Wie gross ist der Umfang des Dreiecks?

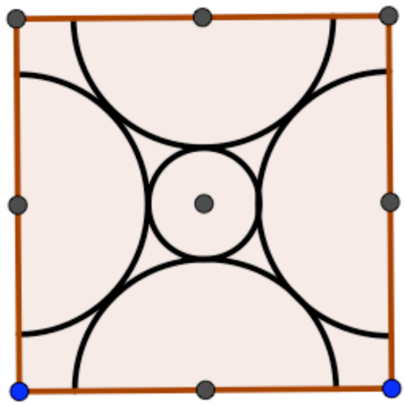
5. Die Streckenzüge stehen jeweils senkrecht aufeinander. Ges: x. Resultat exakt.



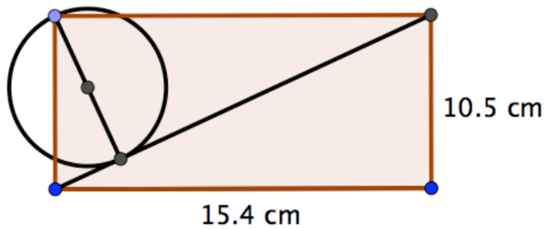
6. Die beiden Vierecke sind Quadrate. Gesucht ist A (a). Resultat exakt.



7. Wie gross ist der Radius x des kleinen mittleren Kreises ausgedrückt durch den Radius r der Halbkreise?



8. Wie gross ist die Fläche des kleinen Kreises in cm^2 (auf 1 Stelle nach dem Komma genau)?



Lösungen:

1. ca. 18.3 km. 2. $x = \frac{2r}{3}$ 3. x = 4.8 cm

4. Die Seiten messen 123 cm, 120 cm und 27 cm, U = 270 cm.

5. $\sqrt{6}$ 6. $A = \frac{a^2 (3 - 2\sqrt{2})}{2}$ 7. $x = r(\sqrt{2} - 1)$

8. 59.1 cm^2

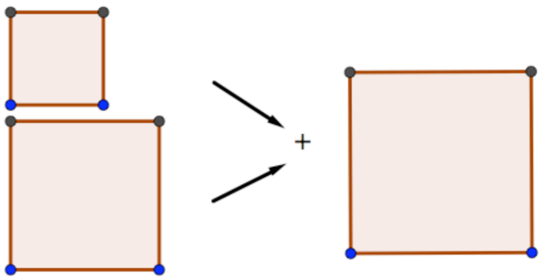
5.11. Anhang 1

5.11.1. Indische Sulbasutras

In der alten indischen Kultur (um 1000 v.Chr.) gab es die "Schnurlehre" (sulbasutra). Sie diente als Anleitung zum Bau von Altären. Man findet dort etwa folgende Anleitung:

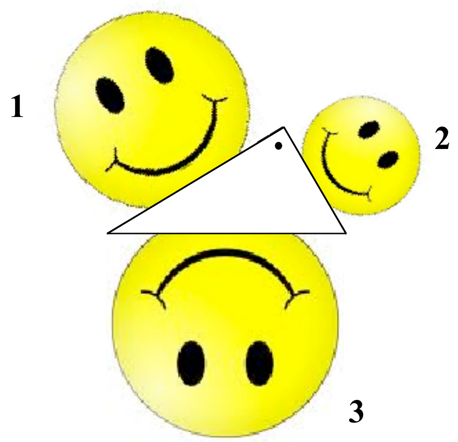
● Das Seil, welches entlang der Diagonale eines Quadrates gespannt wird, liefert eine doppelt so grosse Fläche wie das ursprüngliche Quadrat.

● Ferner wird eine Konstruktion angegeben, die zum Ziel hat, ein Quadrat zu erhalten, das die gleich grosse Fläche hat wie zwei vorgegebene, unterschiedlich grosse Quadrate zusammen.



Wie könnte man diese "Quadratverschmelzung" mit Hilfe des Satzes von Pythagoras durchführen?

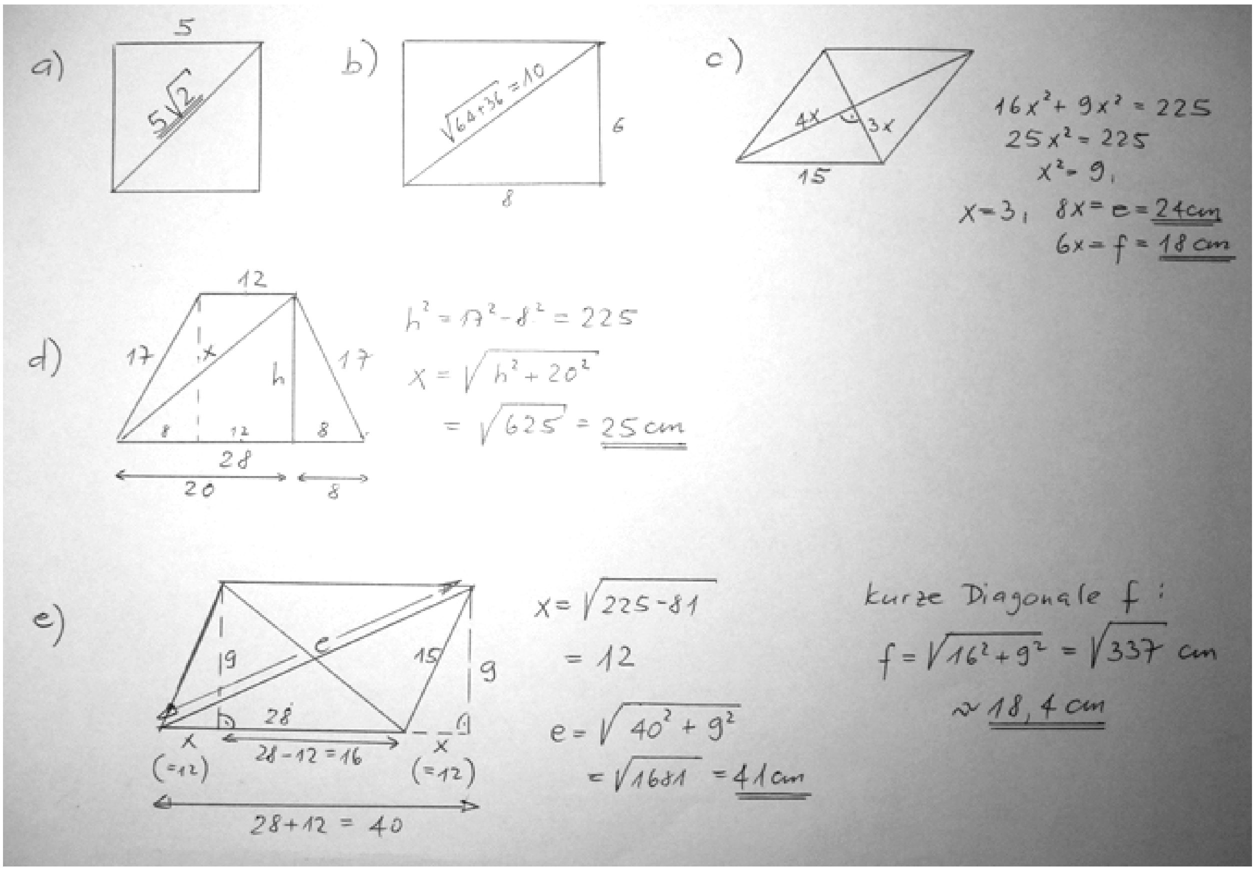
5.11.2. Der Satz von Pythagoras für Smileys



Der Satz von Pythagoras gilt auch für Smileys! Die Gesichtsflächen von Smiley 1 und Smiley 2 zusammen sind gleich gross wie die Gesichtsfläche von Smiley 3.
Analoges gilt für alle Elemente des Bildes von Paul Klee unter 5.2.1.

Anhang 2: Lösungswege zu 5.6.2 und 5.6.3

S. 6, 5.6.2., Nr. 4

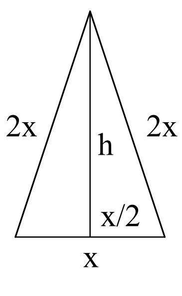


S.6, 5.6.3., Nr. 5

5a) Sei x die Länge eines Schenkels, dann ist $x\sqrt{2}$ die Länge der Hypotenuse.

Umfang = 30 = $x + x + x\sqrt{2} = 2x + x\sqrt{2} = x(2 + \sqrt{2}) = 30 \Longrightarrow x = \frac{30}{2+\sqrt{2}}$

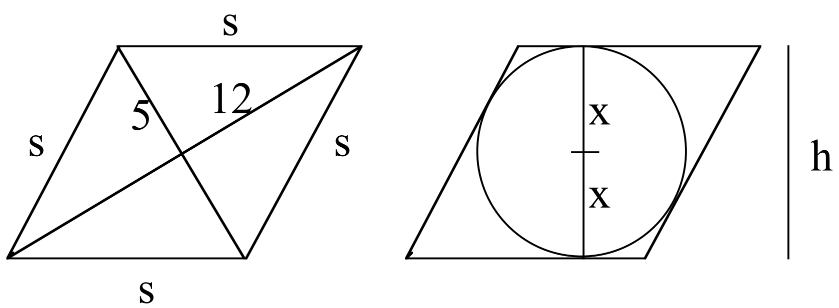
b)



$h = \sqrt{4\,x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{15\,x^2}{4}} = \frac{x\,\sqrt{15}}{2}.$ $\quad A = \frac{\text{Seite} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{x \cdot x\,\sqrt{15}}{2 \cdot 2} = \frac{x^2\,\sqrt{15}}{4}$

Es ist $A = \sqrt{15} = \frac{x^2\,\sqrt{15}}{4} \quad | : \sqrt{15} \Longrightarrow 1 = \frac{x^2}{4} \Longrightarrow 4 = x^2 \Longrightarrow x = 2. \Longrightarrow U = 5x =$ **10 cm**.

c)



s = $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

$A_{\text{Rhombus}} = \frac{e \bullet f}{2} = \frac{24 \bullet 10}{2} = 120 = s \bullet h \Longrightarrow h = \frac{120}{13} \Longrightarrow x = \frac{h}{2} = \frac{60}{13}$ cm.

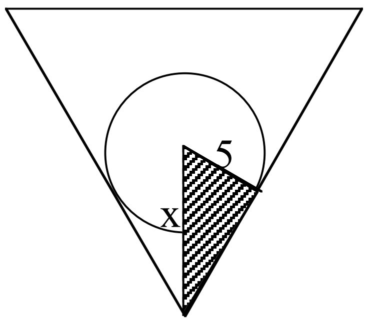
d) Skizze. d = 13 cm. Sei x = Breite $\Longrightarrow \sqrt{13^2 - x^2}$ = Länge

Halber Umfang = 17 = x + $\sqrt{13^2 - x^2} \Longrightarrow (17 - x) = \sqrt{13^2 - x^2}$

$\Longrightarrow (17 - x)^2 = 169 - x^2 \Longrightarrow 289 - 34x + x^2 = 169 - x^2 \Longrightarrow$

$2x^2 - 34x + 120 = 0 \Longrightarrow x^2 - 17x + 60 = 0 \Longrightarrow x = 12$ cm, Länge = 5 cm.

e)



x = 10 cm (Doppeltes von 5; siehe schraffiertes halbes gleichseitiges Dreieck.)