

Lernprogramm Potenzen, Wurzeln Maturvorbereitung / Prüfungsvorbereitung

Umordnen, vereinfachen:

$$1. \frac{x^2 z^{-5} y^3}{y^{-2} z^{-3}} \qquad \frac{x^2 y^3 y^2 z^3}{z^5} = \frac{x^2 y^5}{z^2}$$

Division als Multiplikation mit dem Kehrwert des zweiten Terms:

$$2. \frac{u^m}{v^{m+3}} : \frac{u^{m-5}}{v^{m-2}} \qquad \frac{u^m}{v^{m+3}} \cdot \frac{v^{m-2}}{u^{m-5}} =$$

$$u^{m-m+5} v^{m-2-m-3} = u^5 v^{-5}$$

Binomische Formeln auf Wurzelterme anwenden:

$$3. (3\sqrt{2} + 6\sqrt{3})^2 \qquad 9 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} + 36 \cdot 3 \\ = 126 + 36\sqrt{6} = 18(7 + 2\sqrt{6})$$

$$4. (\sqrt{2} - 5\sqrt{5})(\sqrt{2} + 5\sqrt{5}) \qquad 3.BF: 2 - 25 \cdot 5 = -123$$

Wurzelschreibweise in Exponentenschreibweise umwandeln:

Regeln:

$$\frac{1}{a} = a^{-1} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z} \qquad a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Achtung: $a \cdot \sqrt{a}$ bedeutet eigentlich

$$a^1 \cdot \sqrt[2]{a} = a^{(1 + \frac{1}{2})} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3} = \sqrt{a^3}.$$

Notieren Sie bei \sqrt{a} doch einfach $\sqrt[2]{a}$ und bei a allenfalls a^1 , um Fehler zu vermeiden.

5. Wandeln Sie in Exponentenschreibweise um. Notieren Sie sodann das vereinfachte Ergebnis wieder in Wurzelschreibweise:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{z}}$

$$z^{-\frac{1}{3}}$$

b) $\sqrt[5]{z^{-1}}$

$$z^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{z}}$$

c) $\frac{1}{\sqrt[5]{z^{-1}}}$

$$\left(z^{-\frac{1}{5}}\right)^{-1} = z^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{z}$$

d) $\frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x^{-2}}}{\sqrt[4]{x^2} \sqrt{x^{-1}}}$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{4}} x^{-\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}}$$

e) $\frac{\sqrt{x}}{x^2 \sqrt[3]{x^{-1}}}$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2 x^{-\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}} = x^{-\frac{7}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x^7}}$$

f) $\sqrt{x} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$x^{\frac{1}{2} + 3 - \frac{2}{3}} = x^{\frac{17}{6}} = \sqrt[6]{x^{17}}$$

g) $\sqrt[5]{\frac{1}{a^{10}}}$

$$(a^{-10})^{\frac{1}{5}} = a^{-\frac{10}{5}} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

6. Verschachtelte Wurzelausdrücke (von innen nach aussen lösen).

"Hoch - hoch" \rightarrow Exponenten multiplizieren.

a) $\sqrt[4]{\sqrt{a}}$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a}$$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{-1}}}$

$$\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = a^{-\frac{1}{15}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a}}$$

c) $\sqrt[3]{b \sqrt[8]{b^4}}$

$$\left(b^1 b^{\frac{4}{8}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(b^1 b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$\left(b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$$

d) $\sqrt{\frac{z \cdot z^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{z}}}$

$$\left(\frac{z^1 z^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(z^{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(z^{\frac{17}{15}}\right)^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{17}{30}} = \sqrt[30]{z^{17}}$$

7. Kompliziertere Wurzeln (anspruchsvollere Maturaufgaben):

Notieren Sie in Exponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \text{a*) } \sqrt[m+n]{x^m} : \sqrt[m]{x^{m-n}} &= x^{\frac{m}{m+n}} : x^{\frac{m-n}{m}} = x^{\frac{m}{m+n} - \frac{m-n}{m}} \\ &= x^{\frac{m^2 - (m+n)(m-n)}{(m+n)m}} = \\ &= x^{\frac{m^2 - (m^2 - n^2)}{(m+n)m}} = x^{\frac{n^2}{(m+n)m}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sqrt[m+n]{a^{m^2 - n^2}} = a^{\frac{m^2 - n^2}{m+n}} = a^{m-n}$$

8. Exponentialgleichungen: Gleiche Basis erzeugen durch Umwandeln in Exponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \text{a) } 0.25^x \cdot \frac{1}{2} &= \sqrt{2} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 2^{-1} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ (2^{-2})^x \cdot 2^{-1} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ 2^{-2x} \cdot 2^{-1} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ 2^{-2x-1} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ -2x - 1 &= \frac{1}{2} \iff -4x - 2 = 1 \\ \iff -3 &= 4x \iff \mathbb{L} = \left\{-\frac{3}{4}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 27^x &= \left(\frac{1}{9}\right)^{3x} \\ 3^{-\frac{1}{2}} \cdot (3^3)^x &= (3^{-2})^{3x} \\ 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{3x} &= 3^{-6x} \\ 3^{-\frac{1}{2} + 3x} &= 3^{-6x} \\ -\frac{1}{2} + 3x &= -6x \iff \\ -1 + 6x &= -12x \iff \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{18}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } a^{x-2} &= \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^5}} \\ a^{x-2} &= a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{5}{3}} \\ a^{x-2} &= a^{\frac{1}{2} - \frac{5}{3}} \iff a^{x-2} = a^{-\frac{7}{6}} \\ x - 2 &= -\frac{7}{6} \iff 6x - 12 = -7 \\ \iff 6x &= 5 \iff \mathbb{L} = \left\{\frac{5}{6}\right\} \end{aligned}$$